Diagonalisierung und Selbstreferenzialität

Neil Barton
Universität Konstanz

15. Januar 2021

Diagonalisierung und Selbstreferenzialität

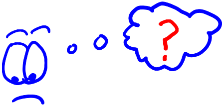
- Zuerst: herzlichen Dank für die Einladung
  ∟ ich schätze es sehr!

- Trotzdem ist die Aufgabe fast unmöglich — Logik in der Philosophie innerhalb 30 Minuten!

- Das ist ein breites Thema.
- Wir werden uns über Selbstreferenzialität (bzw. Diagonalisierung) focusieren.

Betrachten Sie das folgende Beispiel:

- Stellen Sie sich vor, dass Sie ein großes-Fan von Website-Design sind.
- Auf diesem Grund, möchten Sie eine Webseite bauen, die alle Websites enthält, die nicht mit sich selbst verknüpft sind (wie elegant!)
- Frage: Gibt es ein Link auf dieser Webseite zu dieser Webseite?



Diagonalisierung und Selbstreferenzialität

- Das ist eine Version von Russells-Paradox.

$\boxed{\text{Anspruch: Ähnliche Argumentationen sind üblich und wichtig für unseres Verständnis der Welt.}}$

§1 Lügner

§2 Unendlichkeit

§3 Unvollständigkeit

§4 Das Halteproblem

§5 Herausforderungen

Diagonalisierung und Selbstreferenzialität

§1 Das Lügner-Paradox

- Oft benüzt im unserem Diskurs ist das Konzept der Wahrheit.
- z. B. "Viele Sachen, die Nixon sagte, nicht wahr sind."
- Bei Formalisierung, nützen wir ein Wahrheit Prädikat oder "Truth Predicate"

  Tr.

- WIR MÖCHTEN DIESES PRÄDIKAT ZU SÄTZE ANWENDEN.

- WAS SIND SÄTZE? SIE SIND ENDLICHE SEQUENZEN VON SYMBOLEN (Z.B. $\forall x(x=x)$).

- DESHALB KÖNNEN WIR SIE MIT NATÜRLICHEN ZAHLEN CODIEREN. $\varphi \rightsquigarrow \ulcorner\varphi\urcorner$.

SATZ φ CODE VON φ

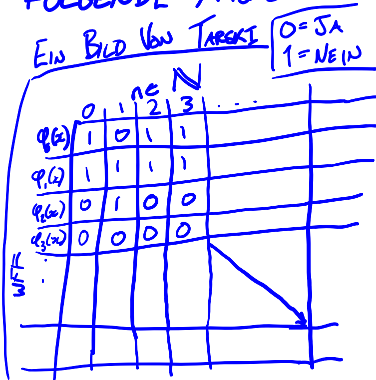
- Dann können wir mit Truth-Predicates in Arithmetik arbeiten.

- Wir möchten (naiv) alle die folgende Axiomen haben:

$$\varphi \leftrightarrow Tr(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

- Was passiert dann mit:

$$\lambda : \lambda \leftrightarrow \neg Tr(\ulcorner \lambda \urcorner) \,?$$

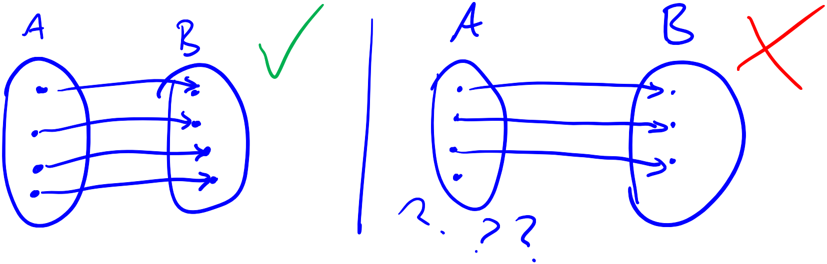


Diagonalisierung und Selbstreferenzialität

- Eine Lösung (vielleicht): Anstatt ein Truth-Predicate, gibt es eine Hierarchie:
  - $Tr_0(\ulcorner\varphi\urcorner)$ ist nur anwendbar zu Sätze, die kein Truth-Predicate enthalten.
  - $Tr_1(\ulcorner\varphi\urcorner)$ ist nur anwendbar zu Sätze, die nur Tr_0 (oder kein) Truth-Predicate enthalten.
- $Tr_{\alpha+1}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ ist nur anwenbar zu Sätze mit maximal Tr_α.

§2 Unendlichkeit

Definition: Mengen A und B haben die gleiche Mächtigkeit wenn es eine Bijektion zwischen A und B gibt.



Theorem (Cantor) Es gibt mehr unendliche Sequenzen $f: \mathbb{N} \to \{0,1\}$ als natürlichen Zahlen.

	0	1	2	3	. . . .
f_0	1	0	0	1	
f_1	0	0	0	0	
f_2	1	1	1	0	
f_3	0	1	0	1	
$\vdots$					

Theorem (Cantor) Lass A eine Menge sei. Dann die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)=\{B \mid B \subseteq A\}$ ist **größer** als A.

- Nehmen wir an dass es eine Bijektion $g: A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$
- Denk an:

$$A \subseteq C = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

$$(\exists a_c \in A)\, g(a_c) = C? \quad a_c \in g(a_c) = C?$$

0 = Nein
1 = Ja

	a_0	a_1	a_2	$\cdots$
g_{a_0}	0	1	1	
g_{a_1}	1	1	1	
g_{a_2}	0	0	1	
$\vdots$				

Diagonalisierung und Selbstreferenzialität

- LÖSUNG (VIELLEICHT?) ES GIBT EINE HIERARCHIE

$$\vdots$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{N}$$

§3 Unvollständigkeit

- Früher sahen wir, dass Sätze begrenzte Sequenzen sind und wir konnten sie mit natürlichen Zahlen codieren.
- Das gilt auch für andere syntaktische Objekten, z. B. Beweise.
- Was ist ein Beweis? Ein endlich Sequenz von Axiomen zu einer Schlussfolgerung.

Diagonalisierung und Selbstreferenzialität

α_1

α_2 Axiomen

α_3

$\vdots$

φ Von Ableitungsregeln

$\varphi \to \psi$

ψ Schlussfolgerung

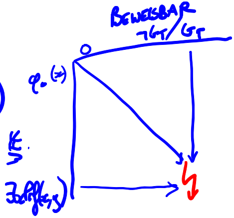
- GÖDELS EINBLICK WAR, DASS WIR BEWEISE MIT NATÜRLICHE ZAHLEN CODIEREN KÖNNTEN, UND EIN BEWEIS-PRÄDIKAT (ODER "PROOF PREDICATE") (FÜR EINE THEORIE) Prf_T IN ARITHMETIK ENTWICKELN.
- $Prf_T(x, \ulcorner \varphi \urcorner)$ BEDEUTET, x CODIERT EINEN BEWEIS VON φ IN T.

- Er hat beweisen, dass solang als T Arithmetik formalisieren kann und konsistent* ist, dann gibt es ein Satz G in T's Sprache, so dass:

$$\vdash_T G_T \leftrightarrow \neg \exists x \, Prf_T(x, \ulcorner G_T \urcorner)$$

und deshalb

$$\nvdash_T G_T \text{ und } \nvdash_T \neg G_T$$



*eigentlich ω-konsistent, Rosser hat es starker gemacht.

- Wir können weiter zeigen, dass G_T äquivalent zu:

$$Con(T) = \neg \exists x \, Prf_T(x, \ulcorner 0 = 1 \urcorner) \text{ ist.}$$

- Nochmals gibt es eine Hierarchie:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ T + Con(T + Con(T)) \\ \downarrow \\ T + Con(T) \\ \downarrow \\ T \end{array}$$

§4 Das Halteproblem

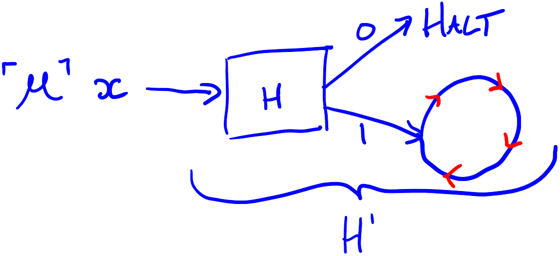
- Unseres letztes Beispiel: Rechner & Berechnerungen.
- Es gibt verschiedene Modelle der Rechner (z.B. Turing Maschine, Abakus Maschine, ...).
- Aber alle (in diesem Kontext) haben einen begrenzt Input und eine endliche Zahl von Befehle.
- Wir können sie auch mit natürlichen Zahlen codieren. $M \rightsquigarrow \ulcorner M \urcorner$

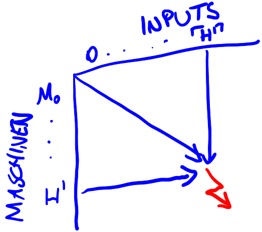
Diagonalisierung und Selbstreferenzialität

- DAMIT HABEN WIR DIE MÖGLICHKEIT, EIN RECHNER AUF DEN CODE VON EINEM ANDEREN ZU ANWENDEN. $\ulcorner M \urcorner \rightarrow \boxed{M_2} \rightarrow$
- EIN PROBLEM MIT EINIGE MASCHINEN: SIE NIE HALTEN.
- KÖNNEN WIR EINE MASCHINE H BAUEN, DIE 1 (JA) BEI EIN $\ulcorner M \urcorner$ UND x SAGT, WENN M AUF x HALTET, ABER 0 (NEIN) SAGT, WENN $\ulcorner M \urcorner$ AUF x NICHT HALTET?

NEIN!

- NEHMEN WIR AN, DASS SO EIN H GIBT.
- DANN BAUEN WIR DIESE MASCHINE:





- WIEDER GIBT ES EINE HIERACHIE

$$\vdots$$
$$\downarrow$$
$$O''$$
$$\downarrow$$
$$O'$$
$$\downarrow$$
$$O$$

- WENN WIR EIN MAGIK SCHACHTEL FÜR DAS HALTEPROBLEM HINZUFÜGEN, GIBT ES EIN WEITERES HALTEPROBLEM.

§5 Herausforderungen

- Wir haben gesehen, dass Diagonalisierung und Selbstreferenzialität wichtig sind, besonderes für unsere Verständnis von:
  - Wahrheit.
  - Unendlichkeit.
  - Unvollständigkeit.
  - Berechnungen.

Diagonalisierung und Selbstreferenzialität

- Mit jeder könnten wir eine Hierarchie nützen, um die Probleme zu vermeiden und erklären.
- Haben wir etwas damit verloren?
- Sollten wir statt:
  - Ein Axiom aufgeben?
  - Klassische Logik nicht akzeptieren?
- Wie ähnlich sind diese Beispiele eigentlich?

Danke fürs Zuhören!
Vielen Dank an:
VolkswagenStiftung
Carolin Antos
Jörg Herwanger
Deborah Kant
Daniel Kuby